РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 531.08 + 621.01

Алюшин Ю. А.

ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ СИЛЫ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ

Понятие «сила» до сих пор не имеет четкого определения в классической (ньютоновой) механике. Более того, в некоторых учебниках утверждается, что «сила считается основным, первичным понятием, не выражающимся через другие понятия» [1]. Ориентация на законы Ньютона для материальной точки и неопределенность понятия «сила» приводят к многообразию их видов. Все аксиомы динамики в классической механике формулируются только для инерциальных систем, в которых тела покоятся или движутся прямолинейно и равномерно, пространство однородно и изотропно. В неинерциальных системах координат, движущихся с ускорением или вращающихся относительно инерциальных, не выполняется как первый, так и второй законы Ньютона.

Чтобы уравнения движения материальной точки в неинерциальной системе совпадали по форме с уравнением второго закона Ньютона дополнительно к «обычным» силам, действующим в инерциальных системах, вводят силы инерции. Это многозначное понятие применимо, в том числе к даламберовым силам в инерциальных системах, эйлеровым силам инерции в неинерциальных системах, ньютоновым силам инерции (силы противодействия), определяемым третьим законом Ньютона. В литературе используются также термины «переносная», «кориолисова» силы инерции и др. [2].

К силам инерции относятся и «центробежные силы», которыми называют силы (или их части) в неинерциальных системах отсчета, не зависящие как от скорости движения материальной точки в этой системе отсчета, так и от ускорений (линейных или угловых) самой этой системы относительно базовой инерциальной системы отсчета [3]. Переход к этому понятию позволяет применять законы Ньютона для расчета ускорений тел через баланс сил в неинерциальных системах отсчета, но, чтобы найти уравнения движения материальной точки, нужно знать законы преобразования сил и ускорений при переходе от инерциальной системы к неинерциальной [4].

В технической литературе обычно переход в неинерциальную систему отсчета не оговаривают явно и считают центробежные силы, действующие со стороны движущегося по круговой траектории тела на вызывающие это движение внешние связи, проявлением закона инерции, считая их равными по модулю центростремительным силам и направленным всегда в противоположную сторону.

Интерес к центробежным силам объясняется их существенной ролью при решении как фундаментальных, так и прикладных вопросов механики. Дискуссия о силах инерции, их природе, реальности и фиктивности, начавшаяся в 30-е годы прошлого века при активном участии журнала «Под знаменем марксизма», продолжается до сих пор [4, 5], в том числе в интернете по проекту «Физика» [6].

Цель работы – показать, используя энергетическую модель механики [7], что центробежные, как и ньютоновы силы, входящие в основной закон динамики, определяют скорость изменения кинетической энергии твердого тела на скоростях изменения соответствующих кинематических параметров. Если для ньютоновых сил это скорости изменения положения центров масс относительно начала системы координат наблюдателя, то для центробежных сил – скорости изменения расстояний между центрами масс и мгновенными центрами скоростей. Причем, так как во втором случае не участвует система координат наблюдателя, можно утверждать, что центробежные силы являются более объективными, информативными и, следовательно, предпочтительными, например, при динамическом уравновешивании механизмов.

Энергетическая модель механики базируется на достаточно простой идее Аристотеля: сравнивать состояния при различных видах движения можно только по единственной скалярной характеристике, которую он назвал «энергией» и определил как «обобщенную меру различных видов движения» [7]. По своей природе эта характеристика должна быть инвариантной, не зависящей от субъективных факторов, в том числе от выбора системы отсчета наблюдателя. Основой для её определения могут быть только уравнения движения, например, в форме Лагранжа:

$$x_i = x_i(\alpha_p, t), \tag{1}$$

так как только они несут информацию о внешних воздействиях и внутренних изменениях, происходящих при движении механической системы. Но входящие в эти уравнения текущие (эйлеровы) $x_i \in (x, y, z)$ и начальные (лагранжевы) $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ координаты, а также время t субъективны, как и система отсчета наблюдателя. Инварианты можно найти только через изменения координат, а также производные по времени и пространству.

Не вдаваясь в детали энергетической модели, которая достаточно подробно описана в литературе [7, 8], отметим, что для недеформируемых тел, при описании движения которых в классической механике используют понятие «центробежные силы», имеют значение 4 инварианта уравнений движения (1): модули векторов перемещения $\vec{u}(\alpha_p, t)$, скорости $\vec{v}(\alpha_p, t)$ и ускорения $\vec{w}(\alpha_p, t)$, а также путь s :

$$\xi_1 = |u| = \sqrt{u^2}\,; \quad \xi_2 = |v| = \sqrt{v^2}\,; \quad \xi_3 = |w| = \sqrt{w^2}\,; \quad \xi_4 = s = \int_0^t |v|\,dt\,. \tag{2}$$

Предполагая, что каждый инвариант соответствует определенному виду энергии, закон сохранения энергии можно записать в виде:

$$d\delta E = \sum d\delta E_i(\xi_i) = d\delta E_p(u) + d\delta E_k(v^2) - d\delta E_e(s) = 0 \quad , \tag{3}$$

где в правой части использованы обозначения для потенциальной (E_p), кинетической (E_k) энергии и работы внешних сил (E_e), соответственно. Это соотношение в конечном итоге определяет ускорения (2) и, следовательно, поведение механической системы в рассматриваемый момент времени. Оператор d характеризует бесконечно малые приращения энергий или иных функций во времени, второй оператор δ подчеркивает, что эти функции, как и являющиеся их аргументами, инварианты, являются локальными, изменяются при переходе от одной частицы к другой. Из уравнения (3) следует, что для практического применения закона сохранения энергии надо определять приращения различных видов энергии $d\delta E_i(\xi_i)$, но для этого надо знать приращения аргументов – обобщенных координат q_j, через которые определены инварианты $\xi_i(q_j)$ уравнений движения (1). В самом общем случае получаем:

$$d\delta E_i(\xi_i(q_j)) = \frac{\partial \delta E_i}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j}dq_j = \delta Q_{ij}dq_j\,; \qquad \delta Q_{ij} = \partial \delta E_i / \partial q_j\,, \tag{4}$$

где δQ_{ij} – обобщенная локальная сила, произведение которой на скорость изменения обобщенной координаты $dq_j / dt \equiv q_{j,t}$ определяет скорость изменения (мощность) соответствующей энергии:

$$\delta W_i(\xi_i(q_j)) = \delta Q_{ij} q_{j,t}\,. \tag{5}$$

Скалярный характер мощности δW_i и математические особенности $q_{j,t}$ определяют скалярные, векторные или тензорные свойства обобщенных сил δQ_{ij} [7].

Дополнительно отметим, что все входящие в это уравнение, функции, включая мощность δW_i, обобщенные силы δQ_{ij} и координаты q_j, являются локальными, как скорости или ускорения частиц. Для абсолютно твердых тел вместо локальной мощности или энергии частиц обычно используют интегральные их значения для всего тела. Например, кинетическую энергию тела с объёмом *V* и массой *m* определяет интеграл:

$$E_k = \int_V (\rho/2) v^2 \delta V = 0{,}5 \int_m v^2 \delta m. \tag{6}$$

В общем случае плоскопараллельное движение абсолютно твердого тела можно рассматривать как поступательное вместе с полюсом $P(x_P, y_P)$ и вращение тела относительно оси, проходящей через полюс *P* ортогонально плоскости движения [7]:

$$x = x_P + (\alpha - \alpha_P)\cos\Delta\varphi - (\beta - \beta_P)\sin\Delta\varphi; \tag{7}$$

$$y = y_P + (\alpha - \alpha_P)\sin\Delta\varphi + (\beta - \beta_P)\cos\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ – угол поворота тела за рассматриваемый промежуток времени, x_P, y_P – текущие координаты полюса, α_P, β_P, α, β – начальные (лагранжевы) координаты полюса *P* и частицы. Используя понятие центра масс $C(x_C, y_C)$ и момента инерции J_P относительно произвольно выбранного полюса $P(x_P, y_P)$, вместо (6) получим:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_P^2 + \frac{1}{2}\varphi_t^2 J_P - \varphi_t m[(x_t)_P (y_C - y_P) - (y_t)_P (x_C - x_P)], \tag{8}$$

где

$$x_C m = \int_m x \delta m; \qquad y_C m = \int_m y \delta m; \qquad J_P = \int_m [(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2] \delta m. \tag{9}$$

Наибольшее распространение уравнение (8) получило для случая, когда полюс *P* совмещен с центром масс *C*, тогда $(x_i)_P = (x_i)_C$ и кинетическую энергию можно представить в виде суммы:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2}\varphi_t^2 J_C, \tag{10}$$

в которой первое слагаемое соответствует энергии поступательного движения тела с скоростью центра масс, второе – энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения [1, 2].

При совмещении полюса с мгновенным центром скоростей (МЦС), в котором по определению скорость равна 0 ($v_P = 0$), уравнение (10) принимает вид:

$$E_k = \frac{1}{2}\varphi_t^2 J_{МЦС}, \tag{11}$$

и, в отличие от (10), характеризует полную кинетическую энергию через вращательное движение тела. С учетом (9)

$$J_{МЦС} = \int_m [(x - x_{МЦС})^2 + (y - y_{МЦС})^2] \delta m = J_C + \rho_{МЦС}^2 m,$$

где $\rho_{МЦС}$ – расстояние между центром масс и МЦС, которое можно найти через скорость центра масс v_C и угловую скорость вращения тела φ_t:

$$\rho_{МЦС}^2 = v_C^2 / \varphi_t^2.$$

Так как $i_C^2 = J_C / m$ и $i_{МЦС}^2 = J_{МЦС} / m$, радиус инерции тела $i_{МЦС}$ относительно МЦС составит:

$$i_{МЦС}^2 = \rho_{МЦС}^2 + i_C^2, \tag{12}$$

причем квадрат линейной скорости точки с радиусом $i_{МЦС}$:

$$\tilde{v}^2 = \varphi_t^2 i_{МЦС}^2 = \varphi_t^2(\rho_{МЦС}^2 + i_C^2) \tag{13}$$

определяет полную кинетическую энергию через поступательное движение тела. Чтобы убедиться в этом, помножим обе части равенства (13) на $0{,}5m$:

$$0{,}5m\tilde{v}^2 = 0{,}5m\varphi_t^2 i_{МЦС}^2 = 0{,}5m\varphi_t^2(\rho_{МЦС}^2 + i_C^2) = 0{,}5mv_C^2 + 0{,}5\varphi_t^2 J_C$$

Результат очевиден и соответствует условию инвариантности кинетической энергии по отношению к выбору полюса:

$$E_k = \frac{1}{2}m\tilde{v}^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\varphi_t^2 J_C = \frac{1}{2}\varphi_t^2 J_{МЦС}. \tag{14}$$

Таким образом, помещая массу тела в эту точку, получаем представление полной кинетической энергии как результат вращательного движения тела с моментом инерции $J_{МЦС}$ (радиусом $i_{МЦС}$) или поступательного со скоростью $\tilde{v} = \sqrt{2E_k/m}$ точки, удаленной от мгновенного центра скоростей на расстояние $i_{МЦС}$, определяемое равенством (12). Энергия движения тела с заданным моментом инерции J_C принимает минимальное значение при совмещении центра масс и МЦС, когда $\rho_{МЦС} = 0$.

Переходя к интегральной энергии (8) или (14), можно, по аналогии с (4), ввести интегральные по объему обобщенные силы Q_{ij}, определяющие приращение энергии тела:

$$dE_i(k_i, \xi_i(q_j)) = \frac{\partial E_i}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j}dq_j = Q_{ij}dq_j.$$

Обобщенная координата q_j в этом случае может быть как локальной, например, координата центра масс, так и интегральной, например, угол поворота тела. В каждом конкретном случае необходимо указывать тип координаты q_j и точку, скорость изменения локального кинематического параметра которой $q_{j,t}$ должна участвовать в расчете скорости изменения энергии тела:

$$W_i = Q_{ij}\frac{dq_j}{dt} = Q_{ij}q_{j,t}. \tag{15}$$

Таким образом, говоря об обобщенных силах интегральных видов энергии для абсолютно твердых тел, необходимо указывать не только способ определения этих сил, но и точки определения («приложения») локальных обобщенных координат, кинематические характеристики которых должны использоваться при определении скорости изменения соответствующего вида энергии.

Для анализа возможных вариантов обобщенных сил (5) при расчете кинетической энергии рассмотрим приращение правой части уравнения (8), предусматривая изменение во времени всех входящих в него кинематических параметров:

$$dE_k = \{m(x_t x_{tt} + x_t x_{tt})_P + \varphi_t\varphi_{tt}J_P -$$
$$-\varphi_t m[(x_{tt})_P(y_C - y_P) - (y_{tt})_P(x_C - x_P)] - \varphi_t m\{(x_t)_P[(y_t)_C - (y_t)_P] - (y_t)_P[(x_t)_C - (x_t)_P)]\} -$$
$$-\varphi_{tt}m[(x_t)_P(y_C - y_P) - (y_t)_P(x_C - x_P)]\}dt.$$

Принимая во внимание соотношения:

$$x_t - (x_t)_P = -\varphi_t(y - y_P); \qquad y_t - (y_t)_P = \varphi_t(x - x_P),$$

которые следуют из (7), и группируя множители при приращениях угла $d\varphi$ и координат полюса dx_P, dy_P

$$dE_k = (Q_{kx})_P\, dx_P + (Q_{ky})_P\, dy_P + (Q_{k\varphi})_P\, d\varphi ,$$

получим в качестве обобщённых сил вектор с точкой приложения в полюсе P с проекциями:

$$(Q_{kx})_P = m[(x_{tt})_P - \varphi_{tt}(y_C - y_P) - \varphi_t^2(x_C - x_P)];$$

$$(Q_{ky})_P = m[(y_{tt})_P + \varphi_{tt}(x_C - x_P) - \varphi_t^2(y_C - y_P)],$$

а также момент пары сил:

$$(Q_{k\varphi})_P = m[(-x_{tt})_P(y_C - y_P) + (y_{tt})_P(x_C - x_P)] + \varphi_{tt}J_P =$$

$$= m[(-x_{tt})_C(y_C - y_P) + (y_{tt})_C(x_C - x_P)] + \varphi_{tt}J_C .$$

Они определяют приращения кинетической энергии поступательного и вращательного движения, соответственно, при произвольном выборе полюса. Учитывая кинематические соотношения для ускорений при плоскопараллельном движении:

$$(x_{tt})_C = (x_{tt})_P - \varphi_{tt}(y_C - y_P) - \varphi_t^2(x_C - x_P);$$

$$(y_{tt})_C = (y_{tt})_P + \varphi_{tt}(x_C - x_P) - \varphi_t^2(y_C - y_P),$$

которые следуют из уравнений (7), для обобщенных сил, используя общепринятые обозначения, можно записать (точки приложения указаны в индексах):

$$(Q_{kx})_P = (Q_{kx})_C = F_x = m(x_{tt})_C; \qquad (Q_{ky})_P = (Q_{ky})_C = F_y = m(y_{tt})_C; \tag{16}$$

$$(Q_{k\varphi})_P = M_P = M_C - (F_x)_{C,P}(y_C - y_P) + (F_y)_{C,P}(x_C - x_P).$$

Первые два соотношения формально совпадают с законом Ньютона для материальной точки. Это дает основание называть их «ньютоновыми силами» и интерпретировать как обобщенные силы, характеризующие скорость изменения кинетической энергии абсолютно твердого тела W_k на скоростях поступательного движения центра масс или любой другой точки тела относительно начала системы координат наблюдателя. В отличие от момента пары сил M_P, проекции F_x, F_y вектора силы не зависят от выбора полюса, вектор является свободным. Только при одновременном использовании сил F_x, F_y и момента M_P с учетом положения полюса P и центра масс C расчет скорости изменения кинетической энергии будет выполнен правильно. Ньютоновы силы и момент пары сил при совмещении полюса с центром масс:

$$F_{kx} = m(x_{tt})_C \qquad F_{ky} = m(y_{tt})_C \qquad M_{C\varphi} = \varphi_{tt}J_C \tag{17}$$

являются самыми распространенными при расчете мощности кинетической энергии:

$$dE_k / dt = W_k = F_{kx}(x_t)_C + F_{ky}(y_t)_C + M_{C\varphi}\varphi_t .$$

Для энергетической интерпретации центробежных сил рассмотрим приращение кинетической энергии (11) при совмещении полюса с мгновенным центром скоростей $J_{МЦС}$, $i_{МЦС}$ – момент и радиус инерции тела относительно МЦС):

$$dE_k = [\varphi_t\varphi_{tt}J_{МЦС} + m\varphi_t^2 i_{МЦС}(i_{МЦС})_t]dt .$$

С учетом (12) получаем:

$$dE_k = \frac{1}{2}md[\varphi_t^2(\rho_{МЦС}^2 + i_C^2)] = m[\varphi_{tt}(\rho_{МЦС}^2 + i_C^2)d\varphi + \varphi_t^2\rho_{МЦС}d\rho_{МЦС}]. \tag{18}$$

Во втором слагаемом правой части уравнения учтено, что радиус инерции тела i_C относительно центральной оси остается неизменным. Обобщенными силами становятся момент M_k и направленная по радиусу центробежная сила $Q_{МЦС}$ [1, 2]:

$$M_k = J_{МЦС}\varphi_{tt} = mi^2_{МЦС}\varphi_{tt}; \qquad Q_{МЦС} = m\varphi_t^2\rho_{МЦС} = m(\varphi_t\rho_{МЦС})^2/\rho_{МЦС} = mv_C^2/\rho_{МЦС} \tag{19}$$

Переходя от модуля $\rho_{МЦС}$ к проекциям $x_{МЦС}$ и $y_{МЦС}$:

$$\rho^2_{МЦС} = x^2_{МЦС} + y^2_{МЦС}$$

и принимая во внимание $\rho_{МЦС}d\rho_{МЦС} = x_{МЦС}dx_{МЦС} + y_{МЦС}dy_{МЦС}$, центробежную силу следует рассматривать, в отличие от (16), как скользящий вектор (см. примечание к уравнению 15), направленный от центра вращения вдоль линии, соединяющей МЦС и центр масс. При расчете M_k нужно учитывать радиус инерции тела $i_{МЦС}$ относительно МЦС (12), а для $Q_{МЦС}$ – расстояние $\rho_{МЦС}$ между МЦС и центром масс.

Обобщенные силы (17), (19) эквивалентны, определяют скорость изменения одной и той же кинетической энергии на скоростях разных кинематических координат. Ньютоновы силы отличаются от центробежных тем, что первые определяют скорость изменения кинетической энергии на скоростях центра масс, вторые – на скоростях изменения расстояния между центром масс и МЦС, их можно ассоциировать с инвариантом v^2/R, который является частным случаем квадрата скорости.

При постоянной угловой скорости и неизменном расстоянии между МЦС и центром масс кинетическая энергия тела не изменяется, момент пары сил отсутствует (за счет углового ускорения $\varphi_{tt} = 0$), а центробежная сила остается равной:

$$Q_\rho = mv_C^2/\rho_{МЦС}.$$

Переход от твердого тела к материальной точке эквивалентен предположению $J_C = 0$ и влияет только на величину момента пары сил:

$$M_{МЦС} = \varphi_{tt}m(\rho_{МЦС})^2 \qquad \text{вместо} \qquad M_{МЦС} = \varphi_{tt}[J_C + m(\rho_{МЦС})^2].$$

Приведенные соотношения показывают возможность использования центробежных сил для расчета скорости изменения кинетической энергии в случаях достаточно сложного изменения положения МЦС.

Если расстояние между мгновенной осью вращения и центром масс не меняется, центробежные силы переходят в разряд пассивных или, точнее, потенциальных сил, которые производят мощность только при нарушении кинематических связей, обеспечивающих сохранение расстояния между мгновенной осью вращения и центром масс. К разряду таких сил можно также отнести усилия, ортогональные направляющим поступательного движения ползунов, а также возникающие в неподвижных осях рычажных механизмов [7, 8].

Два варианта расчета кинетической энергии и скорости её изменения с использованием ньютоновых (полюс совмещен с центром масс) и центробежных (полюс совмещен с мгновенным центром скоростей) сил для шатуна кривошипно-ползунного механизма, когда ось поступательного перемещения ползуна проходит через ось вращения кривошипа, приведены на сайте allmechanics.narod.ru [9]. Кривошип OA вращается вокруг неподвижной оси O (0, 0), совмещенной с началом координат, с угловой скоростью φ_t и ускорением φ_{tt}. В любой момент времени координаты, скорости и ускорения точки A определяют уравнения (7), которые при совмещении полюса с неподвижным началом координат принимают вид:

$$x_A = \alpha_A\cos\Delta\varphi - \beta_A\sin\Delta\varphi; \quad y_A = \alpha_A\sin\Delta\varphi + \beta_A\cos\Delta\varphi; \quad (x_t)_A = -\varphi_t y_A; \qquad (y_t)_A = \varphi_t x_A;$$

$$(x_{tt})_A = -\varphi_t(y_t)_A - \varphi_{tt}y_A; \qquad (y_{tt})_A = \varphi_t(x_t)_A + \varphi_{tt}x_A.$$

Кинематические характеристики оси шарнира A, соединяющей кривошип и шатун, могут быть использованы для последующего расчета координат, скоростей и ускорений любых частиц шатуна с шарнирами A и B в соответствии с уравнениями:

$$x_B = x_A + (\alpha_B - \alpha_A)\cos\Delta\psi - (\beta_B - \beta_A)\sin\Delta\psi\,;$$

$$y_B = y_A + (\alpha_B - \alpha_A)\sin\Delta\psi + (\beta_B - \beta_A)\cos\Delta\psi\,;$$

$$(x_t)_B = (x_t)_A - \psi_t(y_B - y_A)\,; \qquad (y_t)_B = (y_t)_A + \psi_t(x_B - x_A)\,.$$

Аналогичные уравнения справедливы и для центра масс шатуна С:

$$x_C = x_A + (\alpha_C - \alpha_A)\cos\Delta\psi - (\beta_C - \beta_A)\sin\Delta\psi\,;$$

$$y_C = y_A + (\alpha_C - \alpha_A)\sin\Delta\psi + (\beta_C - \beta_A)\cos\Delta\psi\,;$$

$$(x_t)_C = (x_t)_A - \psi_t(y_C - y_A)\,; \qquad (y_t)_C = (y_t)_A + \psi_t(x_C - x_A)\,.$$

Необходимые для расчета угловые характеристики вращения шатуна $\Delta\psi$, ψ_t и ψ_{tt} находим из кинематических связей $(L_2 = AB)$:

$$\sin(\pi - \psi) = y_A / L_2\,;\ \psi = \pi - \arcsin(y_A / L_2)\,;$$

$$\psi_t = -\varphi_t x_A / [L_2 \cos(\pi - \psi)]\,;$$

$$\psi_{tt} = -(y_{tt})_A / L_2 \cos(\pi - \psi) + (y_t)_A \varphi_t \sin(\pi - \psi) / L_2 \cos^2(\pi - \psi)\,.$$

Эти результаты позволяют определить положение МЦС в системе координат наблюдателя:

$$x_{МЦС} = x_A(1 - \varphi_t / \psi_t)\,; \qquad y_{МЦС} = y_A(1 - \varphi_t / \psi_t)\,,$$

из которых следует:

$$x_{МЦС} / y_{МЦС} = x_A / y_A\,; \qquad y_{МЦС} / y_A = x_{МЦС} / x_A\,; \qquad y_{МЦС} = x_{МЦС} tg(\varphi)\,,$$

что легко проверить графическим построением МЦС для рассматриваемой схемы механизма.

Сравнение результатов расчета кинетической энергии для шатуна по двум вариантам при различных положениях кривошипа [9] показывает полное совпадение суммарных значений при любых угловых скоростях и ускорениях кривошипа, а также инерционных характеристиках (массах и моментах инерции) всех звеньев механизма. Инвариантом является только полная кинетическая энергия, а не её составляющие, ассоциируемые с поступательным и вращательным движениями звеньев.

Скорость изменения кинетической энергии определяют обобщенные силы. Если полюс совмещен с центром масс, тогда:

$$W_k = \psi_t \psi_{tt} J_C + m[(x_{tt})_C (x_t)_C + (y_{tt})_C (y_t)_C]\,,$$

где множители угловых и линейных скоростей по определению являются обобщенными (ньютоновыми) силами и моментом (в нижнем индексе момента дополнительно указано положение полюса):

$$F_{kx} = m(x_{tt})_C\,; \qquad F_{ky} = m(y_{tt})_C\,; \qquad M_{k\varphi C} = \psi_{tt} J_C\,.$$

В случае совмещения полюса с МЦС, когда вместо (11) можно записать:

$$E_k = \frac{1}{2}\psi_t^2 (J_C + m\rho_{МЦС}^2)\,,$$

для скорости изменения кинетической энергии шатуна получаем:

$$W_k = \psi_t \psi_{tt} J_{МЦС=P} + \psi_t^2 [0 + m(\rho_t)_{МЦС}\, \rho_{МЦС}] = M_{kMCS}\psi_t + Q_{kMCS}(\rho_{МЦС})_t$$

с обобщенными силами

$$M_{kMCS} = \psi_{tt} J_{МЦС=P}\,; \qquad Q_{kMCS} = m\psi_t^2 (\rho_{1МЦС})\,.$$

Как и для кинетической энергии, доли мощности (скорости изменения) кинетической энергии, ассоциируемые с поступательным и вращательным движением тела, не являются инвариантами, зависят от выбора полюса. Вместе с тем, скорость изменения полной кинетической энергии при любом выборе полюса остается одинаковой. Таким образом, ньютоновы и центробежные силы эквивалентны по результатам расчета скорости изменения кинетической энергии.

ВЫВОДЫ

В энергетической модели механики силы интерпретируются как множители уравнений для расчета скорости изменения различных видов энергии на скоростях изменения соответствующих кинематических параметров. Обычно кинетическую энергию представляют в виде суммы составляющих от поступательного и вращательного движения тела. Силы, ассоциируемые с законом Ньютона, и произведение момента инерции на угловое ускорение тела определяют лишь один из вариантов расчета скорости изменения кинетической энергии на скоростях линейных и угловых координат. В окрестности центра масс движущегося абсолютно твердого тела в любой момент времени можно указать точку, которая определяет полную кинетическую энергию тела как на вращательном (за счет момента инерции), так и на поступательном (за счет её линейной скорости) движении. Центробежные силы имеют такую же природу, как и ньютоновы силы, характеризуют скорость изменения кинетической энергии на скорости изменения расстояния между центром масс тела и мгновенным центром скоростей. Центробежные силы не зависят от выбора системы координат наблюдателя и поэтому более объективны и предпочтительны, в частности, при динамическом уравновешивании шарнирно-рычажных и иных механизмов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики: учеб. для машиностр. и приборостр. специальностей вузов / Н. Н. Никитин. – 6 изд., перераб. и доп. – М. : Высш. Шк., 2003. – 719 с. : ил. – С. 161.

2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. учеб. для втузов / С. М. Тарг. – 12-е изд. – М. : Высш.шк., 2003 – 416 с.

3. Физическая энциклопедия в 5 томах [Электронный ресурс] – Режим доступа : http://dic.academic.ru.

4. Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции / А. Ю. Ишлинский – М. : Наука, 1987. – 320 с.

5. Ишлинский А. Ю. К вопросу об абсолютных силах и силах инерции в классической механике [Электронный ресурс] / А. Ю. Ишлинский. – Режим доступа: http://termech.mpei.ac.ru/info/tm23.html.

6. Обсуждение: Сила инерции. [Электронный ресурс] – Режим доступа : https://ru.wikipedia.org/wiki.

7. Алюшин Ю. А. Энергетические основы механики / Ю. А. Алюшин – М. : Машиностроение, 1999. – 192 с.

8. Алюшин Ю. А. Механика твердого тела в переменных Лагранжа. / Ю. А. Алюшин – М. : Машиностроение, 2012. – 192 с.

9. Динамический анализ КПМ.xlsx. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://allmechanics.narod.ru/2ran/index.htm.

REFERENCES

1. Nikitin N. N. Kurs teoreticheskoj mehaniki: ucheb. dlja mashinostr. i priborostr. special'nostej vuzov / N. N. Nikitin. – 6 izd., pererab. i dop. – M. : Vyssh. Shk., 2003. – 719 s. : il. – S. 161.

2. Targ S. M. Kratkij kurs teoreticheskoj mehaniki: ucheb. dlja vtuzov / S. M. Targ – 12-e izd. – M. : Vyssh.shk., 2003 – 416 s.

3. Fizicheskaja jenciklopedija v 5 tomah [Jelektronnyj resurs] – Rezhim dostupa : http://dic.academic.ru.

4. Ishlinskij A. Ju. Klassicheskaja mehanika i sily inercii / A. Ju. Ishlinskij – M. : Nauka, 1987. – 320 s.

5. Ishlinskij A. Ju. K voprosu ob absoljutnyh silah i silah inercii v klassicheskoj mehanike [Jelektronnyj resurs] / A. Ju. Ishlinskij. – Rezhim dostupa: http://termech.mpei.ac.ru/info/tm23.html.

6. Obsuzhdenie: Sila inercii. [Jelektronnyj resurs] – Rezhim dostupa : https://ru.wikipedia.org/wiki.

7. Aljushin Ju. A. Jenergeticheskie osnovy mehaniki / Ju. A. Aljushin – M. : Mashinostroenie, 1999. – 192 c.

8. Aljushin Ju. A. Mehanika tverdogo tela v peremennyh Lagranzha. / Ju. A. Aljushin – M. : Mashinostroenie, 2012. – 192 s.

9. Dinamicheskij analiz KPM.xlsx. [Jelektronnyj resurs] – Rezhim dostupa: http://allmechanics.narod.ru/2ran/index.htm.

Алюшин Ю. А. – д-р техн. наук, проф. НИТУ МИСиС.

НИТУ МИСиС – Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, г. Москва, РФ.

E-mail: alyushin7@gmail.com

Статья поступила в редакцию 05.05.2015 г.